QCM :

1) 0 est un minimum relatif de f
2) La fonction f est croissante sur [-1,-0,5[et]-0,5,0]
3) X=-0,5
4) Y=2
5) Trois point communs

Vrai-Faux :

1) (faux) ; conte exemple : $f(x)=x^4$ et a=0
2) (vrai)

x	a-h	a	a+h
f''(x)	-	0	+
f'(x)	↘	f'(a)	↗

f'' s'annule en a en changeant de signe d'où le point I(a,f(a)) est un point d'inflexion pour (C_f)

3) (faux) ; contre exemple : $f(x)=\frac{1}{x}$, $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$, $\mathbb{I}=]0,2[$ f' est croissante sur]0,2[mais f est décroissante sur]0,2[
4) (faux) ; contre exemple :

$f(x)=\cos x \qquad I=\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$f'(x)=-\sin x$

$f''(x)=-\cos x \le 0 \qquad \text{pour } x \in I$

mais f n'est pas décroissante sur $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

Ex1 :

$\Delta : y=-x+2$

1) $*\lim_{x\to-\infty} f(x)=0 \quad *\lim_{x\to0^-} f(x)=+\infty \quad *\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty \quad *\lim_{x\to2^-} f(x)=-\infty$

$*\lim_{x\to2^+} f(x)=+\infty \quad *\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \quad *\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=-1 \quad *\lim_{x\to+\infty} (f(x)+x-2)=0$

2)

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
f'(x)	+ ‖	+	0 -	‖ -	
f(x)	0 ↗ $+\infty$ ‖	$-\infty$ ↗	1 ↘ $-\infty$	‖ $+\infty$ ↘	$-\infty$

3)* $m\in\ ]-\infty,0]\cup\{1\}$ l'équation : f(x)=m admet trois solutions

* $m\in\ ]0,1[$ l'équation f(x)=m admet quatre solutions

* $m\in\ ]1,+\infty[$ l'équation f(x)=m admet deux solutions

Ex2 :

1) $(\zeta_f)=(\zeta_3)$; $(\zeta_g)=(\zeta_1)$; $(\zeta_h)=(\zeta_2)$

2) * (ζ_1) admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(O,\vec{i})$

* (ζ_2) admet la droite Δ:y=x comme asymptote oblique

* (ζ_3) admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$

Ex3 :

1) $D_f=[1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-3\sqrt{x-1}=-\infty$ d'où : la droite Δ:y=2x est une direction asymptotique à (ζ_f) au voisinage de $+\infty$

2) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\sqrt{x+2}$ $D_f=[-2,+\infty[/\{0\}$

* $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}-\sqrt{x+2}=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\infty$

la droite d'équation x=0 est une asymptote verticae à (ζ_f)

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}-\frac{\sqrt{x+2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}-\sqrt{\frac{x+2}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}-\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} = 0$$

(ζ_f) admet une branche infinie de direction parabolique celle de $(O,\vec{i})$

3) $f(x) = x.\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
x-1	-	-	0 +	
x+1	-	0 +	+	
$\dfrac{x-1}{x+1}$	+	|| -	0 +	

$D_f =]-\infty;-1[\cup[1,+\infty[$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} = 1$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x.\left[\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}-1\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} x.\left[\dfrac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}\right]$

$$= \lim_{x\to+\infty} x.\left[\frac{-2}{(x+1)(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1)}\right] = \lim_{x\to+\infty}(\frac{x}{x+1})(\frac{-2}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}) = -1$$

d'où Δ:y=x-1 est une asymptote oblique à (ζ_f) au voisinage $(+\infty)$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = -\infty \Rightarrow$ *la droite d'éq* : $x=-1$ *est une* asymptote à (ζ_f)

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=1$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{x}{x+1})(\dfrac{-2}{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+1})=-1$

Δ:y=x-1 asymptote oblique à (ζ_f) au voisinage $(-\infty)$

Ex4 :

$f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\sqrt{1+x^2})^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}=0$

d'où y=0 est une asymptote à (ζ_f) au voisinage $(-\infty)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x^2}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=0$

d'où Δ:y=2x est une asymptote à (ζ_f) au voisinage $(+\infty)$

Ex5 : $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+4 & \text{si } x\le 1\\ \dfrac{1}{x}+x+1 & \text{si } x>1\end{cases}$

1) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{(x-1)^2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0=f'_g(1)$

* $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-2x+1}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{x}=0=f'_d(1)$

f est dérivable à gauche et à droite en 1 et $f'_d(1)=f'_g(1)=0$ d'où

f est dérivable en 1 et f'(1)=0

2)

- la fonction : $x \mapsto x^2 - 2x + 4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

en particulier sur $]-\infty, 1[$ d'où f est dérivable sur $]-\infty, 1[$

- de meme f est dérivable sur $]1, +\infty[$
- f est dérivable en 1

conclusion : f est dérivable sur IR

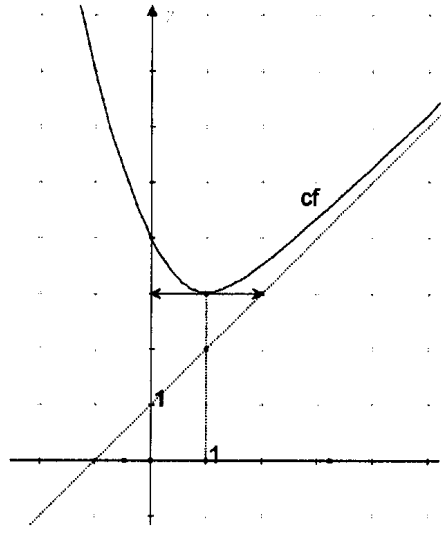
$$f'(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{si } x \le 1 \\ f'(1) = 0 & \\ \dfrac{x^2-1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3) $$f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{x^2-1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}(x-2+\dfrac{4}{x}) = +\infty$ (C_f) admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(O, \vec{j})$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ $\Delta : y = x+1$ est une asymptote à (C_f) au voisinage $(+\infty)$



Ex6 : $f(x)=\frac{x^2}{3}+\frac{9}{4x}$

1) $D_f=\mathbb{R}^*$

2) $f'(x)=\frac{2}{3}x-\frac{9}{4x^2}=\frac{(2x-3)(4x^2+6x+9)}{12x^2}$ le signe de $f'(x)$ est celui de (2x-3) car $4x^2+6x+9>0$

3)

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
f'(x)		-	‖	-	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	‖	↘	$\frac{9}{4}$	↗	$+\infty$
		$-\infty$	‖				

4) • la droite d'équation x=0 est une asymptote à (C_f)

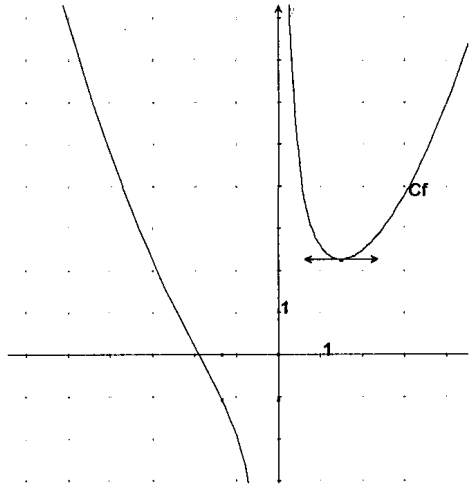
• $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{3}+\frac{9}{4x^2}\right)=+\infty$ (C_f) admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$ au voisinage $(+\infty)$

• de meme : $\lim\limits_{-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ (C_f) admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$ au voisinage $(-\infty)$

5)

6)

$(C'):y=|f(x)|$



Ex7 :

1)* $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=+\infty$ (de la forme $\dfrac{1}{0^+}$)

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x+2))=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}-(x+2)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-2}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}=0$

Δ:y=x+2 est une asymptote à (ζ_f) au voisinage $(+\infty)$

2) • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-2}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x}=0$

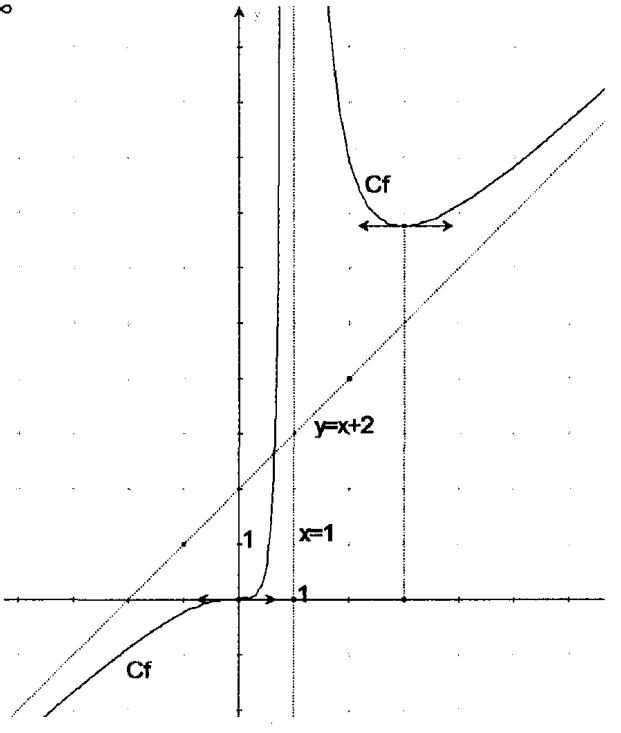
Δ est une asymptote à (ζ_f) au voisinage $(-\infty)$

• $f'(x)=\dfrac{x^2.(x-3)}{(x-1)^3}$

x	-∞	0	1	3	+∞
f'(x)	+	0	+ || -	0	+
f(x)	-∞ ↗	+∞	+∞ ↘	27/4 ↗	+∞

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$



Ex8 :

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+5}{(x+1)^2} \qquad x\neq -1$$

1) $f(x)=\dfrac{(x^3+3x^2+3x+1)+4}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)^3+4}{(x+1)^2}=x+1+\dfrac{4}{(x+1)^2}$ (a=1 ; b=1 ; c=4)

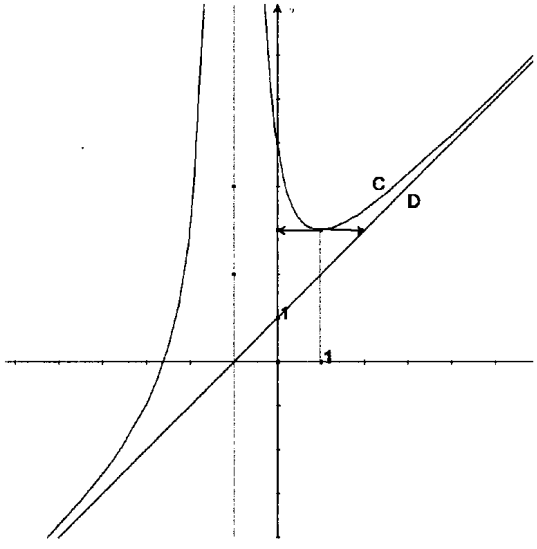
2) $f'(x)=1-\dfrac{8}{(x+1)^3}=\dfrac{(x+1)^3-8}{(x+1)^3}=\dfrac{(x-1)(x^2+4x+7)}{(x+1)^3}$

$x^2+4x+7>0$ (car $\Delta<0$) $\Rightarrow$ le signe de f'(x) est celui de $\dfrac{x-1}{x+1}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'(x)	+		‖	-	0	+	
f(x)	$-\infty$ ↗		$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

3) a) $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{(x+2)^2}=0$ d'où D :y=x+1 est une asymptote à (C) au voisinage de $(\pm\infty)$

b) $f(x)-(x+1)=\dfrac{4}{(x+1)^2}>0$ $\Rightarrow$ (C) est au dessus de D



Ex9 :

$$f(x)=\frac{x^2-2x+3}{x-1}$$

1) $f(x)=\dfrac{(x^2-2x+1)+2}{x-1}=\dfrac{(x-1)^2}{x-1}+\dfrac{2}{x-1}=x-1+\dfrac{2}{x-1}$

2) $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$ $\quad x^2-2x-1=0$ *pour* $x=1-\sqrt{2}$ ou $x=1+\sqrt{2}$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	‖	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	$-2\sqrt{2}$	↘	‖	$+\infty$ ↘	$2\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

3) montrons que I(1,0) est un centre de symétrie pour (C)

- pour $x\in D_f=\mathbb{R}/\{1\}\Rightarrow x\neq 1\Rightarrow -x\neq -1\Rightarrow 2-x\neq 1\Rightarrow (2-x)\in D_f$

- $f(2-x)=(2-x)-1+\dfrac{2}{(2-x)-1}=1-x+\dfrac{2}{1-x}=-x+1-\dfrac{2}{x-1}=-f(x)$

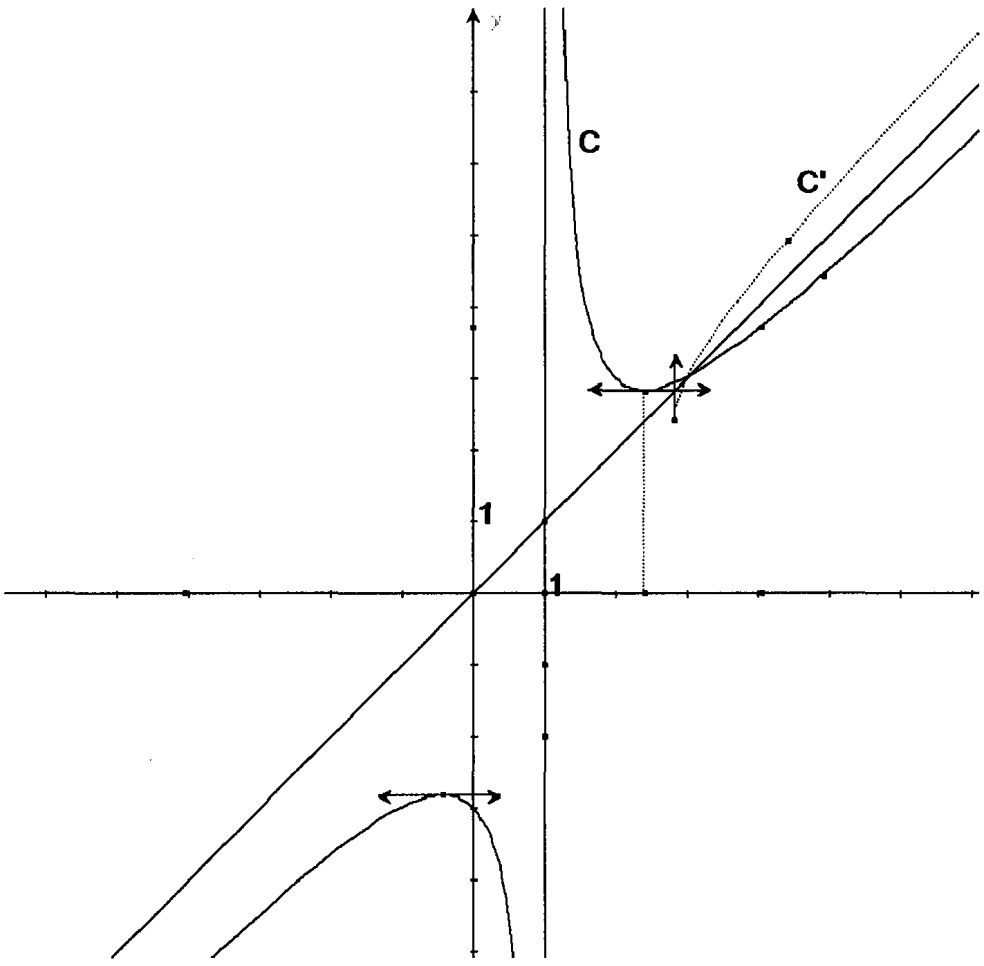
d'où $I(1,0)$ est un centre de symétrie pour (C)

4) a) $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x-1}=0$ d'où D : y=x-1 est une asymptote à (C)

b) $f(x)-(x-1)=\dfrac{2}{x-1}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'(x)	-	‖	+
P.R	$D/(C)$	‖	$(C)/D$

c)



5) g est continue et strictement croissante sur $\left[1+\sqrt{2},+\infty\right[$, elle réalise donc une bijection de $\left[1+\sqrt{2},+\infty\right[$ sur $\left[2\sqrt{2},+\infty\right[$

6) a) g est strictement croissante sur $\left[1+\sqrt{2},+\infty\right[$, d'où g^{-1} est strictement croissante sur $\left[2\sqrt{2},+\infty\right[$

x	$2\sqrt{2}$	$+\infty$
$g^{-1}(x)$	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$

b) $g(x)=x \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x+3}{x-1}=x \Leftrightarrow x^2-2x+3=x^2-x \Leftrightarrow x=3$

$(C)\cap(C')=\{A(3,3)\}$

c) $(C')=S_{\Delta}(C_g)$ avec Δ :y=x

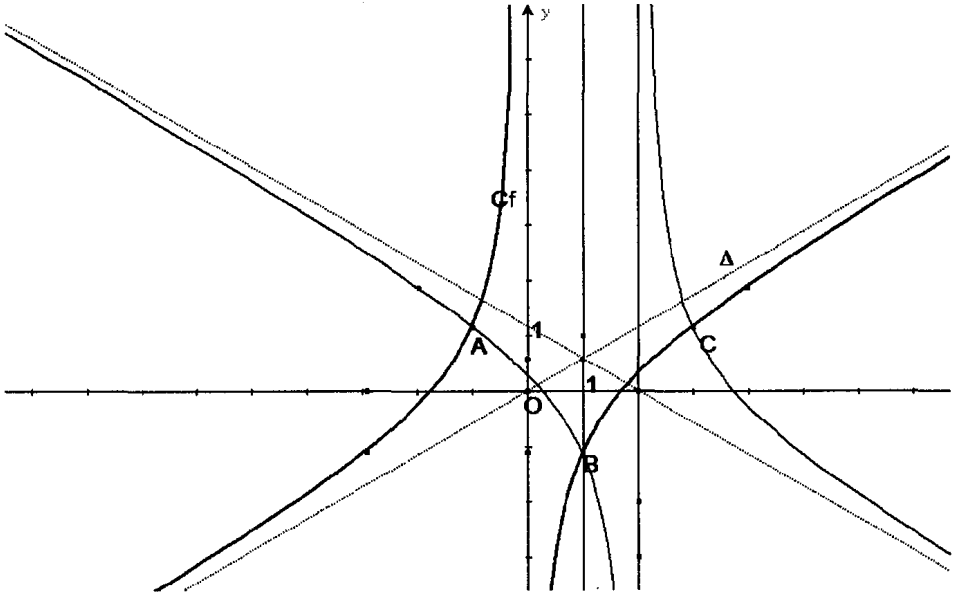
Ex10 : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}}{x}$

1) $D_f=\mathbb{R}^*$ f est une fonction impaire $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{x^2}>0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)	+		‖	+	
f(x)		$+\infty$	‖		$+\infty$
	$-\infty$	↗	‖	↗	$-\infty$

$\lim\limits_{|x|\to+\infty}(f(x)-\dfrac{x}{\sqrt{3}})=\lim\limits_{|x|\to+\infty}-\dfrac{\sqrt{3}}{x}=0$

d'où la droite $\Delta: y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ est une asymptote à (C) au voisinage de $\pm\infty$



2) D :x=1

a) M(x,y) ; M'(x',y')

$$S(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} M*M' \in D \\ \overrightarrow{MM'} \perp \vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+x'}{2}=1 \\ y'=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=2-x \\ y'=y \end{cases}$$

b) $M(x,y)\in(C) \Leftrightarrow y=f(x) \Leftrightarrow y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}}{x} \Leftrightarrow y'=\dfrac{2-x'}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}}{2-x'}$

d'où (C') : $y=\dfrac{2-x}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}}{2-x}$

c) $(C)\cap(C')$

$$M(x,y)\in(C)\cap(C') \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}}{x} \\ y=\dfrac{2-x}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}}{2-x} \end{cases}$$

$$\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{x}=\frac{2-x}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2-x} \Leftrightarrow x-\frac{3}{x}=2-x-\frac{3}{2-x} \Leftrightarrow \frac{x^2-3}{x}=\frac{x^2-4x+1}{2-x}$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3)(2-x)=x(x^2-4x+1) \Leftrightarrow 2x^3-6x^2-2x+6=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x^2-4x-6)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \quad \text{ou} \quad 2x^2-4x-6=0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \quad \text{ou } x=-1 \quad \text{ou} \quad x=3$$

d'où $(C)\cap(C')=\{A,B,C\}$ A(1,f(1)) ; B(-1,f(-1)) et C(3,f(3))

d) $(C')=S_D(C)$

Ex11 : $f(x)=|x+1|+\dfrac{x}{x^2-1}$

1) $D_f=\mathbb{R}/\{-1,1\}$

2) $$f(x)=\begin{cases} -(x+1)+\dfrac{x}{x^2-1} & \text{si } x<-1 \\ x+1+\dfrac{x}{x^2-1} & \text{si } x>-1 \text{ et } x\neq 1 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-1-\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2} & \text{si } x<-1\\ 1-\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2} & \text{si } x>-1 \text{ et } x\neq 1\end{cases} \qquad f'(x)=\begin{cases}-(1+\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}) & \text{si } x<-1\\ \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} & \text{si } x>-1 \text{ et } x\neq 1\end{cases}$$

* pour $x\in\,]-\infty,1[\quad f'(x)<0$

* dans $]-1,+\infty[\,/\{1\}\quad f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ ou $x=\sqrt{3}$

X	$-\infty$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
f'(x)	+	‖ -	0 -	‖ -	0	+
f(x)	$+\infty$ ↘	‖ $+\infty$ ↘	‖	‖ $+\infty$ ↘	$1+3\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗ $+\infty$
		$-\infty$	$-\infty$			

3) les droites d'équations respectives x=-1 et x=1 sont des asymptotes à (C)

* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

$\Delta_1: y=x+1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+(x+1)\right]=0$

d'où $\Delta_2: y=-x-1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$

4) pour $x\in\,]-1,+\infty[\,/\{1\}$, $f(x)-(x+1)=\dfrac{x}{x^2-1}$

x	-1	0	1	$+\infty$
f(x)-(x+1)	‖ +	0 -	‖	+
P.R	‖ $(C)/\Delta_1$	$\Delta_1/(C)$ A(0,1)	‖	$(C)/\Delta_1$

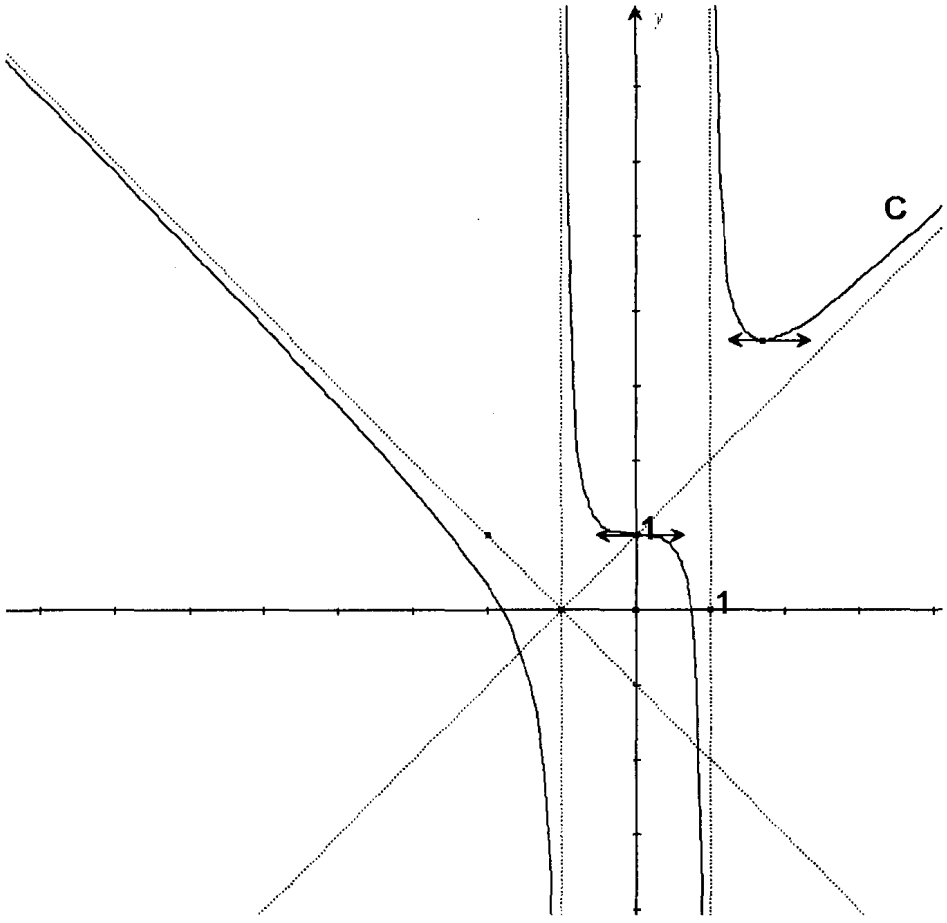
pour $x\in\,]-\infty,-1[\quad f(x)+x+1=\dfrac{x}{x^2-1}<0$ (C) est au dessus de Δ_2

5) T :y=1 pour $x \in]-1,1[$ $f(x) = x+1+\frac{x}{x^2-1} \Rightarrow f(x)-1 = x+\frac{x}{x^2-1} = \frac{x^3}{x^2-1}$

x	-1		0		1
f'(x)	‖	+	0	-	‖
P.R	‖	$(C)/T$		$T/(C)$	‖

A(0,1)

6)



Ex12 : $f(x)=\dfrac{x^4-6x^2+1}{x^3-x}$

1) a) $x^3-x=0 \Leftrightarrow x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou x=1 ou x=-1. $D_f=\mathbb{R}^*/\{-1,1\}$

b) $f(x)=x+\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{x+1}$

$$f(x)=\frac{x^2(x^2-1)+a(x^2-1)+bx(x+1)+cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=\frac{x^4+(a+b+c-1)x^2+(b-c)x-a}{x^3-x}$$

Par identification : on aura : $\begin{cases} a+b+c-1=-6 \\ b-c=0 \\ -a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=c=-2 \end{cases}$ d'où

$$f(x)=x-\frac{1}{x}-\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+1}$$

2) $f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{(x+1)^2}$ $\qquad f'(x)>0$

x	- ∞	-1	0	1	+ ∞
f'(x)	+	+	+	+	
f(x)	+ ∞	+ ∞ | + ∞	+ ∞	+ ∞ | + ∞	
	↗	↗	↗	↗	
	- ∞	+ ∞ | - ∞	- ∞	- ∞ |	

3) $\lim\limits_{|x|\to\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{|x|\to\infty}\left(\dfrac{-1}{x}-\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}\right)=0$

les droite d'équations respectives x=-1 ; x=0 ; x=1 et y=x sont des asymptotes à (C)

4)

$f(x)=0 \Leftrightarrow x^4-6x^2+1=0$ et $x\in D_f \Leftrightarrow (x^2-3)^2=8$ et $x\in D_f$

$\Leftrightarrow x^2-3=\sqrt{8}$ ou $x^2-3=-\sqrt{8} \Leftrightarrow x^2=3+\sqrt{8}$ ou $x^2=3-\sqrt{8}$

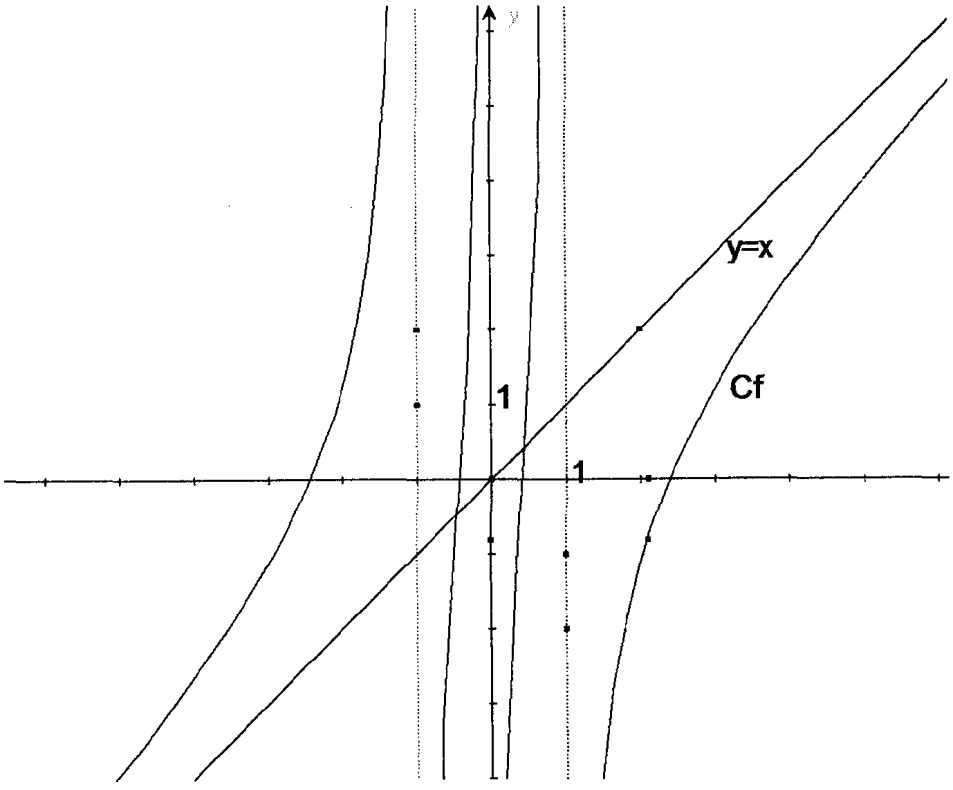
$\Leftrightarrow x=-\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ou $x=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ou $x=-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ ou $x=\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{-\sqrt{3+2\sqrt{2}};\sqrt{3+2\sqrt{2}};-\sqrt{3-2\sqrt{2}};\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right\}$

$$*f(x)=x \Leftrightarrow \frac{x^4-6x^2+1}{x^3-x}=x \Leftrightarrow x^4-6x^2+1=x^4-x^2 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-1}{\sqrt{5}} \quad \text{ou} \quad x=\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{-1}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$$

5) f est une fonction impaire d'où (C) admet le point O(0,0) comme centre de symétrie



6) $P_k(x)=x^4-kx^3-6x^2+kx+1$ dans $\mathbb{R}^*/\{-1;1\}$ $P_k(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=k$; graphiquement l'équation f(x)=k admet toujours quatre solutions distinctes

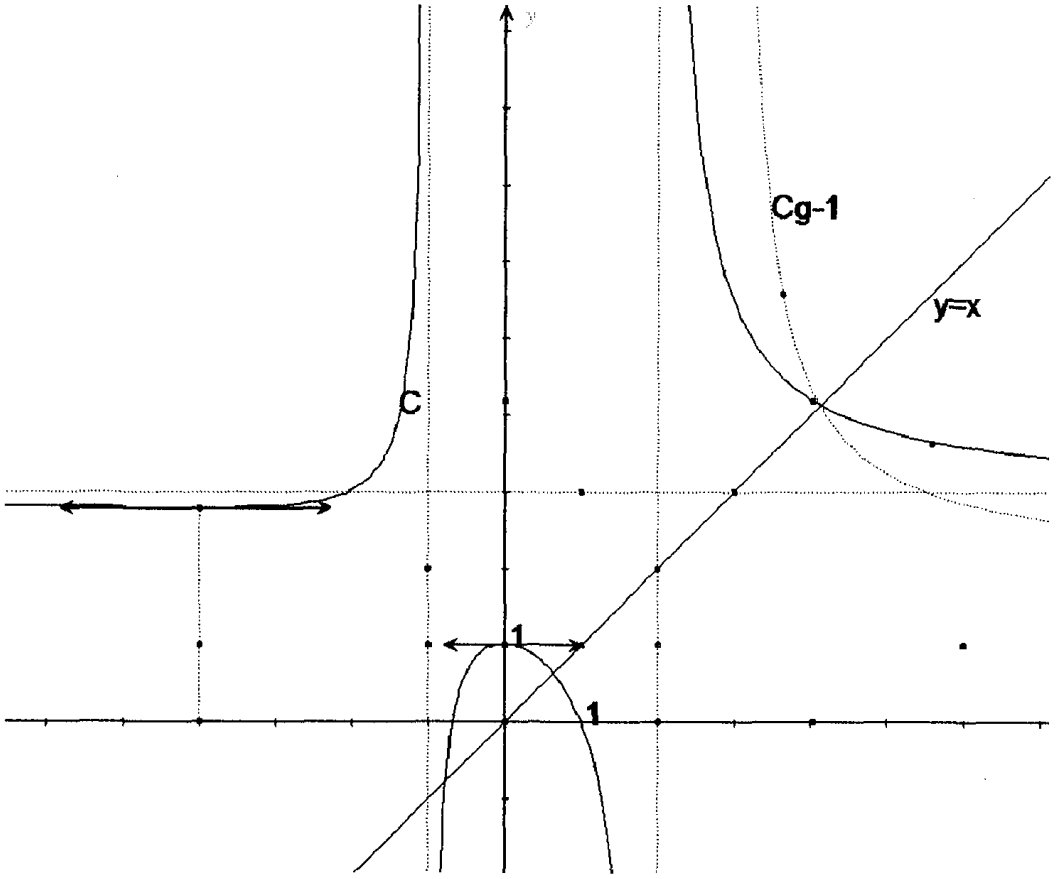
Ex13 : $f(x)=\dfrac{3x^2-x-2}{x^2-x-2}$

1) $x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x'=-1$ et x"=2 $\quad D_f=\mathbb{R}/\{-1;2\}$

2) $f'(x)=\dfrac{-2x(x+4)}{(x^2-x-2)^2}$

X	$-\infty$	-4	-1	0	2	$+\infty$
f'(x)	-	0 +	+	0 -	-	
f(x)	3 ↘	$+\infty$ ↗	$-\infty$ ↗	1 ↘	$-\infty$ ↘	3
		$\frac{25}{9}$				

3) les droites d'équations respectives x=-1 ; x=2 et y=3 sont des asymptotes à (C)



4) dans $\mathbb{R}/\{-1,2\}$

$$f(x)=m \Leftrightarrow (3-m)x^2+(m-1)x+2(m-1)=0$$

<u>1er cas</u> : $m\in\ ]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$ l'équation (E_m) admet deux solutions de signes contraires

<u>2em cas</u> : $m\in\ \left]1,\frac{25}{9}\right[$ l'équation (E_m) n'admet pas de racines

3^em cas : $m \in \left[\frac{25}{9}, 3\right[\cup \{1\}$ l'équation (E_m) admet une unique solution négative

5) a) g est continue et strictement décroissante sur $]2,+\infty[$ elle réalise donc une bijection de $]2,+\infty[$ sur g($]2,+\infty[$)= $]3,+\infty[$

par suite g admet une fonction réciproque g^{-1}

définie sur $]3,+\infty[$

b) $(C_{g^{-1}}) = S_{\Delta}(C_g)$ avec $\Delta : y = x$

Ex14 :

$f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)2}$; $x \neq 1$

1) $x+5+\frac{12}{x-1}+\frac{8}{(x-1)^2} = \frac{(x+5)(x-1)^2+12(x-1)+8}{(x-1)^2} = \ldots = f(x)$

2) $f'(x) = 1 - \frac{12}{(x-1)^2} - \frac{16}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$

x	- ∞	-1	1	5	+ ∞
f'(x)	+	0 +	-	0	+
f(x)	- ∞	+ ∞	+ ∞	$\frac{27}{2}$	+ ∞

3) a) $\lim_{|x|\to+\infty}[f(x)-(x+5)]$

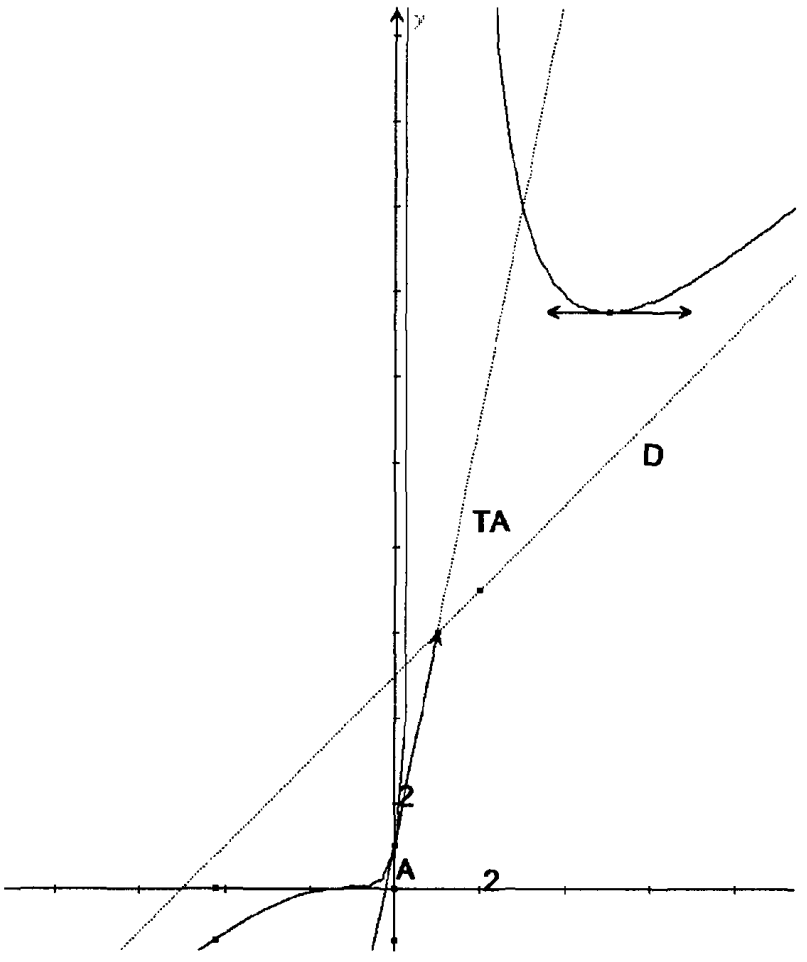
$= \lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{12}{x-1}+\frac{8}{(x-1)^2}\right) = 0$ d'où la droite D : y=x+5 est une asymptote à (C)

b) $f(0) = 1 \Rightarrow A(0,1)$

$f(x) = x+5 \Leftrightarrow \frac{12}{x-1}+\frac{8}{(x-1)} = 0 \Leftrightarrow 12x-4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ d'où $B(\frac{1}{3},\frac{16}{3})$

c) $T_A : y = 5x+1$ $T_B : y = 28x-4$

d)



Ex15:

$f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$

1) a) $x^2-x+1=0$ Δ=-3<0

d'où $x^2-x+1>0$; $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ $D_f=\mathbb{R}$

b) $x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ d'où $f(x)=\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$

2) a) $f(x)-(x-\frac{1}{2})=\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}-(x-\frac{1}{2})=\dfrac{3/4}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+(x-\frac{1}{2})}$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-\frac{1}{2})=0\Rightarrow \Delta$:y=x-$\frac{1}{2}$ est une asymptote à (ζ_f) au voisinage $(+\infty)$

b) $f(x)-(x-\frac{1}{2})=\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}-(x-\frac{1}{2})$

$(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>(x-\frac{1}{2})^2 \Rightarrow \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}>\left|x-\frac{1}{2}\right|$

$\Rightarrow \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}>(x-\frac{1}{2}) \Rightarrow \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}-(x-\frac{1}{2})>0$

$\Rightarrow f(x)-(x-\frac{1}{2})>0$ *donc* (ζ_f) est au dessus de Δ

3) * $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2.(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x|.\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=-1$

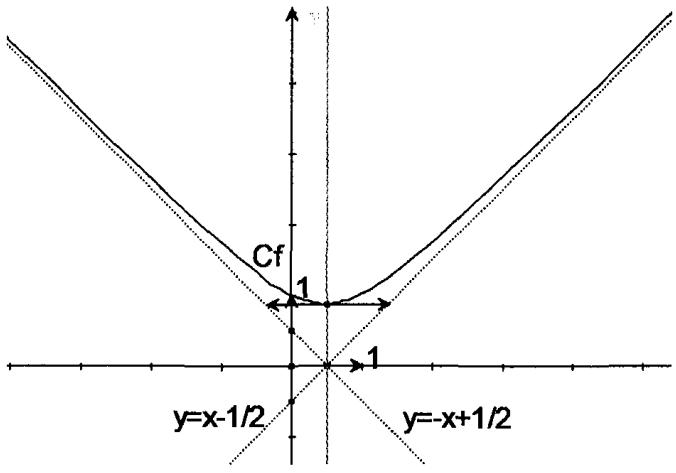
* $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x^2-x+1)-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}-x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x+1}{|x|.\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x(1-\frac{1}{x})}{-x\left[\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right]}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2}$

D:y=-x+$\frac{1}{2}$ est une asymptote à (ζ_f) au voisinage (-∞)

4) $f'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$

x	-∞	½	+∞
f'(x)	-	0	+
f(x)	+∞ ↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗ +∞



Ex16 :

$f(x)=\sqrt{x^2+3x-4}$

1) $x^2+3x-4=0$ x'=1 et x ''=-4

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
x^2+3x-4		+	0	-	0	+	

$D_f=]-\infty,-4]\cup[1,+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to(-4)^-}\dfrac{f(x)-f(-4)}{x+4}=\lim\limits_{x\to(-4)^-}\dfrac{\sqrt{x^2+3x-4}}{x+4}=\lim\limits_{x\to(-4)^-}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3x-4}}=-\infty$

f n'est pas dérivable à gauche en (-4)

(C_f) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse -4

$*\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+3x-4}}=+\infty$ f n'est pas dérivable à droite en 1

(C_f) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse 1

3) la fonction $x \mapsto x^2+3x-4$ est dérivable et strictement positive sur chacun des intervalles $]-\infty,-4[$ et $]1,+\infty[$, d'où f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty,-4[$ et $]1,+\infty[$ $\quad f'(x)=\dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x-4}}$

4)

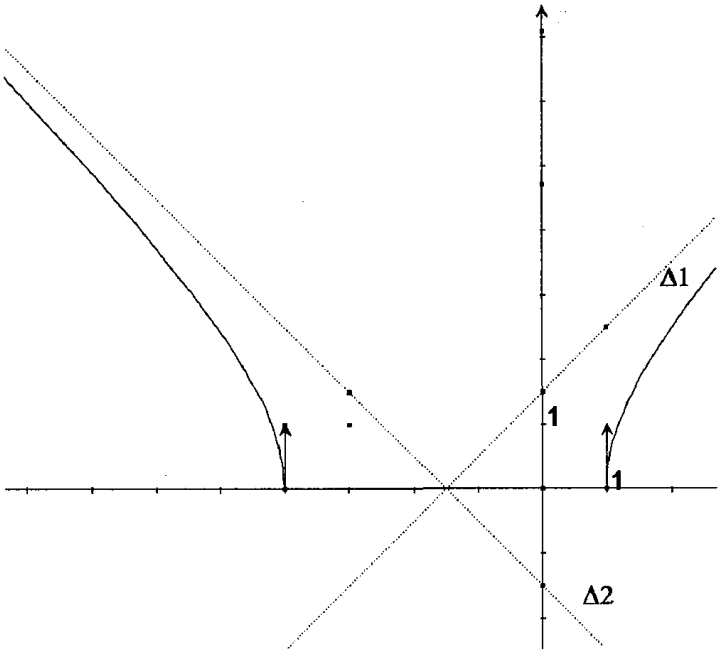
X	- ∞		-4		1		+ ∞
f'(x)		-	‖		‖	+	
f(x)	+ ∞	↘	0	↗	0	↗	+ ∞

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{x^2}}=1$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-4}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-4}{\sqrt{x^2+3x-4}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-4/x}{\sqrt{1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{x^2}}+1}=\frac{3}{2}$$

$\Delta_1 : y=x+\dfrac{3}{2}$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$

de même : $\Delta_2 : y=-x-\dfrac{3}{2}$ est une asymptote à (C) au voisinage de ($-\infty$)



6) a)

b) $(\Gamma): x^2 - y^2 + 3x - 4 = 0$ $\quad x^2 - y^2 + 3x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow y^2 = x^2 + 3x - 4 \Leftrightarrow y = \sqrt{x^2+3x-4}$ ou $y = -\sqrt{x^2+3x-4} \Leftrightarrow y = f(x)$ ou $y = -f(x)$

d'où $(\Gamma) = (C) \cup (C')$ avec $(C') = S_{(Ox)}(C)$

Ex17 :

$f(x) = x^2 - 32\sqrt{x} + 31$

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x - \dfrac{32}{\sqrt{x}}\right) = -\infty$ f n'est pas dérivable à droite en 0

2) f est dérivable sur $]0,+\infty[$

$$et\ f'(x) = 2x - \frac{16}{\sqrt{x}} = \frac{2x\sqrt{x}-16}{\sqrt{x}} = \frac{2\left[(\sqrt{x})^3 - 8\right]}{\sqrt{x}} = \frac{2(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}{\sqrt{x}}$$

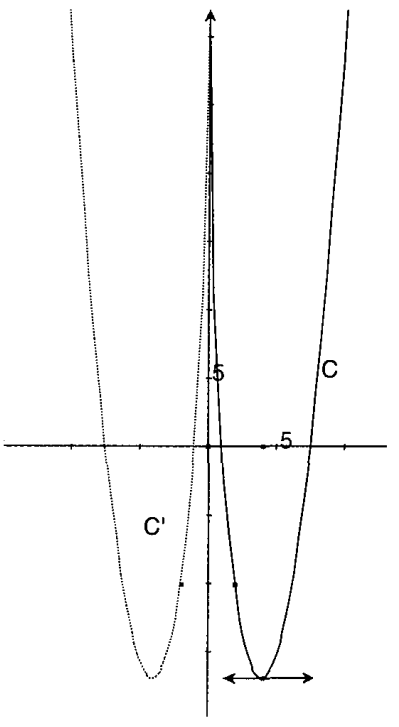
x	0		4		$+\infty$
f'(x)	‖	-	0	+	
f(x)	31	↘	-17	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left[x - \frac{32}{\sqrt{x}} + \frac{31}{x}\right] = +\infty$$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - \dfrac{32}{\sqrt{x}} + \dfrac{31}{x}\right) = +\infty$

(C) admet une branche parabolique de

direction celle de $(O, \vec{j})$



4) $g(x) = x^2 - 32\sqrt{|x|} + 31$

- $D_g = \mathbb{R}$
- g est une fonction paire
- pour $x \in \mathbb{R}_+$ $g(x) = f(x)$

d'où $(C_g) = (C) \cup (C')$ avec $(C') = S_{(Oy)}(C)$

Ex18 :

$g(x) = x\sqrt{x} + 10$

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ g est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0) = 0$

2) $g'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x} \geq 0$

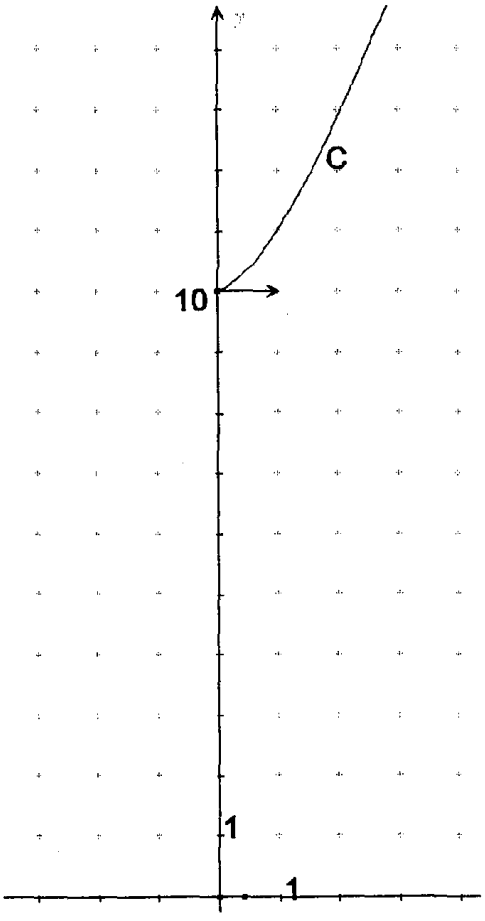
3)

x	0		$+\infty$
g'(x)	0	+	
g(x)	10	↗	$+\infty$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x} + \dfrac{10}{x}\right) = +\infty$

(C) admet une branche parabolique de direction celle de $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$

5)



Ex19 :

$f(x) = \dfrac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}$

1) $D_f = [-2,2]/\{0\}$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$4-x^2$		-	0	+	0	-	

2)
$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{4-x^2}+(2-x)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x}\left[-1+\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}\right]$$
$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x}\left[-1+\frac{4-x^2}{(x-2)\sqrt{4-x^2}}\right]=\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x}\left[-1-\frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}}\right]=-\infty$$

f n'est pas dérivable à gauche en 2.

(C) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse 2

3) la fonction : $x\mapsto 4-x^2$ est dérivable et strictement positive sur]0,2[

d'où la fonction : $x\mapsto\sqrt{4-x^2}$ est dérivable sur]0,2[

par suite f est dérivable sur]0,2[comme étant quotient de deux fonctions dérivables

$$f(x)=\frac{2}{x}+\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

$$f'(x)=\frac{-2}{x^2}+\frac{\frac{-x^2}{\sqrt{4-x^2}}-\sqrt{4-x^2}}{x^2}=\frac{-2}{x^2}-\frac{4}{x^2\sqrt{4-x^2}}=\frac{-2}{x^2}\left[1+\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\right]<0$$

4) f est une fonction impaire , il suffit de l'étudier sur]0,2]

x	0		2
f'(x)		-	
f(x)	+∞	↘	1

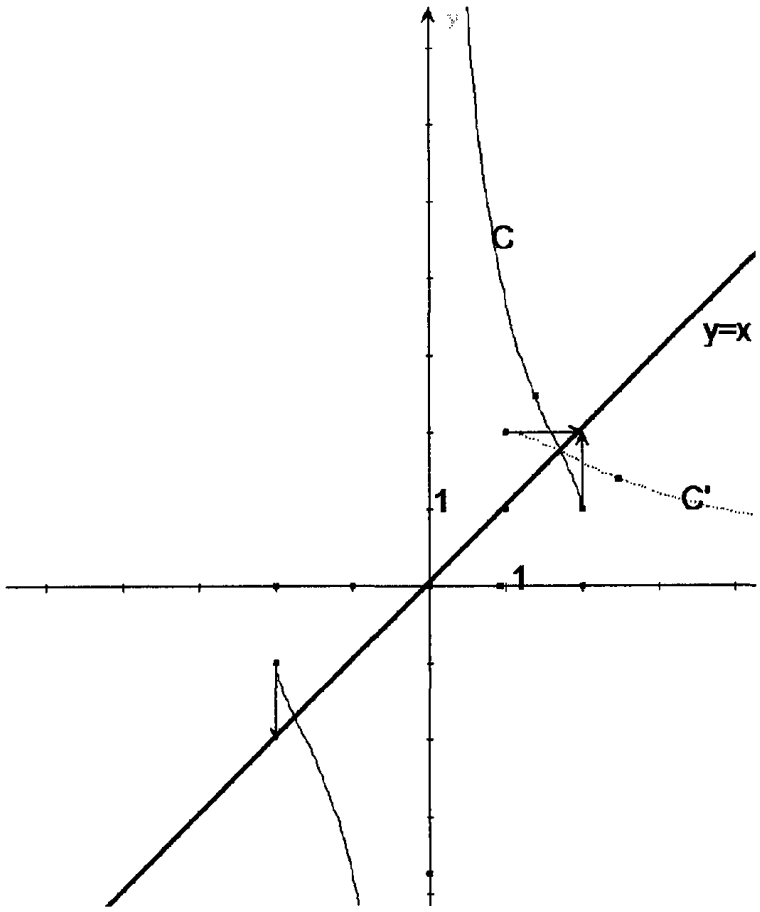
5) a) $f(x)=x\Leftrightarrow\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}=x\Leftrightarrow x^2=2+\sqrt{4-x^2}$

$\Leftrightarrow x^2-2=\sqrt{4-x^2}\Leftrightarrow x^4-4x^2+4=4-x^2\Leftrightarrow x^4-3x^2=0$

$\Leftrightarrow x^2(x^2-3)=0\Leftrightarrow x^2=3$ car $x\neq 0\Leftrightarrow x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$

$(C)\cap D=\{A,B\}$ *avec* A$(-\sqrt{3},-\sqrt{3})$ et B$(\sqrt{3},\sqrt{3})$

b) O(0,0) est un centre de symétrie pour (C)



6) a) f est continue et strictement décroissante sur]0,2] , elle réalise donc une bijection de]0,2] sur [1,+∞[

b) soit $y = f^{-1}(x)$ avec : $x \in [1,+\infty[$; $y \in]0,2]$

$$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \frac{2+\sqrt{4-y^2}}{y} = x \Leftrightarrow xy-2 = \sqrt{4-y^2} \Leftrightarrow x^2y^2 - 4xy + 4 = 4 - y^2$$

$$\Leftrightarrow (1+x^2)y^2 - 4xy = 0 \Leftrightarrow y\left[(1+x^2)y - 4x\right] = 0 \Leftrightarrow (1+x^2)y - 4x = 0 \quad \text{car } y \neq 0 \Leftrightarrow y = \frac{4x}{1+x^2}$$

d'où $f^{-1}(x) = \frac{4x}{1+x^2}$

c) $(C') = S_D(C_1)$ avec (C_1) : la courbe de la restriction de f sur]0,2]

Ex20 :

$$f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

1) $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{3}{2\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^3}$$

x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	-2	↗	2

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+1/x}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(2+1/x)}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+1/x}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=-2$$

2) $f(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{-1}{2}$ $\qquad I(\frac{-1}{2},0)$

- pour $x\in D_f=\mathbb{R}$ on a : $(-1-x)\in D_f$
- $f(-1-x)=\frac{2(-1-x)+1}{\sqrt{(1+x)^2+(-1-x)+1}}=\frac{-(2x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}}=-f(x)$

d'où $I(\frac{-1}{2},0)$ est un centre de symétrie pour (C)

3) $\Delta: y=\frac{3}{2}x$

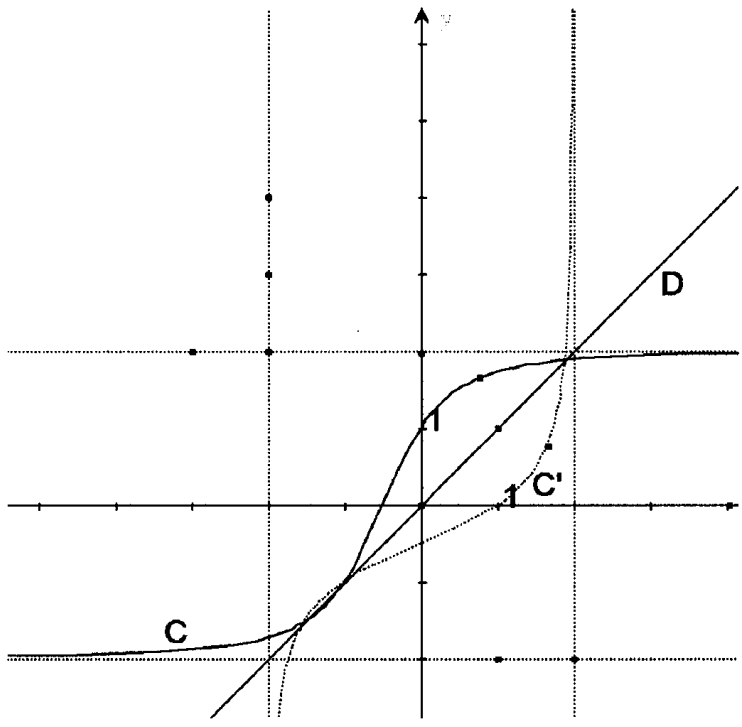
$$f'(x)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{3}{2\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+x+1}=1\Leftrightarrow x^2+x+1=1$$

$$\Leftrightarrow x(x+1)=0\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=-1$$

les tangentes à (C) aux points d'abscisse 0 et -1 sont parallèles à Δ

$$T_0: y=\frac{3}{2}x+1 \qquad T_1: y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$$

4)



5) a) f est continue et strictement croissante sur IR , elle réalise donc une bijection de IR sur f(IR)=]-2,2[, d'où f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur]-2,2[

b) $(C_{f^{-1}}) = S_D(C_f)$ avec D : y=x

c) $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(1)\right)} = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{2}{3}$

Ex21 :

I/ $f(x) = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$

1) $D_f = \mathbb{R}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	-1	↗	0

$$f(x)=\frac{-1}{2}+\frac{x}{2|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

pour x>0 , $f(x)=\frac{-1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

pour x<0 , $f(x)=\frac{-1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$

2) f est continue et strictement croissante sur IR , elle réalise donc une bijection de IR sur f(IR)=]-1,0[

II/ $g(x)=\frac{-1}{2}x+1+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$

1) $g'(x)=f(x)<0$

x	-∞		+∞
g'(x)		-	
g(x)	+∞	↘	1

$$g(x)=1+\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$$

$$g(x)=1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\right] \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} g(x)=1$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ d'où Δ_1 :y=1 est une asymptote à (C')

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=-1$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}(g(x)+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2}x+1+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\right)=1$

Δ_2 :y=-x+1 est une asymptote à (C) au voisinage de (-∞)

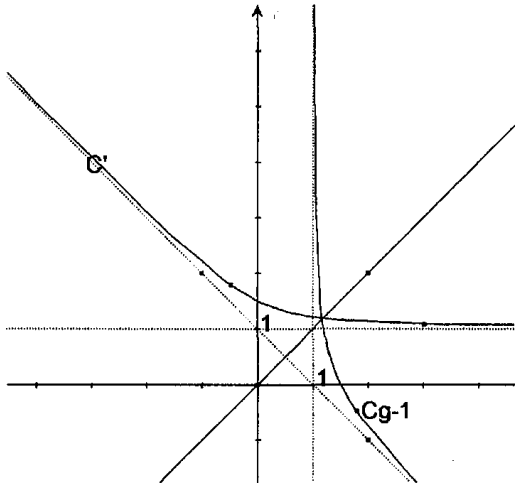
- position relative de (C') et Δ_1

$$\left.\begin{array}{l} g(x)-1=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+1}-\dfrac{1}{2}x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) \\ x^2+1>x^2\Rightarrow\sqrt{x^2+1}>|x|\Rightarrow\sqrt{x^2+1}>x \end{array}\right\rangle \Rightarrow g(x)-1>0$$ (C') est au dessus de Δ_1

- position relative de (C') et Δ_2

$$\left.\begin{array}{l} g(x)-(-x+1)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) \\ \sqrt{x^2+1}>|x|\Rightarrow\sqrt{x^2+1}>-x \end{array}\right\rangle \Rightarrow g(x)-(-x+1)>0$$ (C') est au dessus de Δ_2

3) a)



b) g est continue et strictement décroissante sur IR , elle réalise donc une bijection de IR sur g(IR)=]1,+∞[

c) on pose $y=g^{-1}(x)$ avec x>1 , y∈ $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow g(y)=x\Leftrightarrow\frac{-1}{2}y+1+\frac{1}{2}\sqrt{y^2+1}=x\Leftrightarrow\sqrt{y^2+1}=2x+y-2$$

$$\Leftrightarrow y^2+1=4x^2+4xy-8x+y^2-4y+4\Leftrightarrow(4x-4)y=1-4(x^2-2x+1)$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{4x-4}-\frac{x^2-2x+1}{x-1}\Leftrightarrow y=\frac{1}{4x-4}-\frac{(x-1)^2}{x-1}\Leftrightarrow y=\frac{1}{4x-4}-(x-1)$$

d'où $g^{-1}(x)=\dfrac{1}{4x-4}-(x-1)$

d) $(C_{g^{-1}})=S_\Delta(C')$ avec Δ :y=x

Ex22 :

$$f(x)=1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

1) $D_f=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-x\left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)}{1+x^2}=\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}>0$$

x	-∞		+∞
f'(x)		+	
f(x)		↗	2
	0		

pour $x\neq 0$; $f(x)=1+\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=2 \quad et \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=0$$

2) a) $f''(x)=\frac{-3x}{(1+x^2)^2.\sqrt{1+x^2}}$

x	- ∞	0	+ ∞
f''(x)	+	0	-

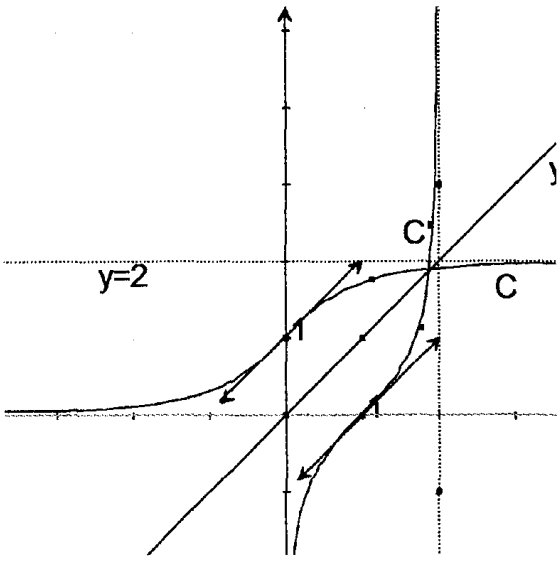
f'' s'annule en 0 en changeant de signe d'où A(0,1) est un point d'inflexion pour (C)

b) T :y=x+1

c) A(0,1) * pour $x\in D_f=\mathbb{R}$ on $(-x)\in D_f$

$$* \quad f(-x)=1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=2-\left[1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]=2-f(x)$$

d'où A(0,1) est un centre de symétrie pour (C)



3) a) f est continue et strictement croissante sur IR , elle réalise donc une bijection de IR sur f(IR)=]0,2[

b) $y = f^{-1}(x)$ avec $\begin{vmatrix} x \in]0,1[\\ y \in \mathbb{R} \end{vmatrix}$

$$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow 1 + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = x \Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = x - 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{1+y^2} = (x-1)^2$$

avec y et (x-1) de même signe (*)

$$\Leftrightarrow y^2 = (x-1)^2 y^2 + (x-1)^2 \Leftrightarrow (2x - x^2) y^2 = (x-1)^2 \Leftrightarrow y^2 = \frac{(x-1)^2}{2x-x^2} \Leftrightarrow y = \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}$$

d'après (*) d'où $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}$

c) $(C_{f^{-1}}) = S_{\Delta}(C)$ avec Δ :y=x

d) f est dérivable sur IR et $f'(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \neq 0$ d'où f^{-1} est dérivable sur]0,2[

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}} \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{\sqrt{2x-x^2} - (x-1)\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}}{2x-x^2}$$

$$\Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{(2x-x^2)+(x-1)^2}{(\sqrt{2x-x^2})^3} = \frac{1}{(\sqrt{2x-x^2})^3}$$

4) $f(x)=x \Leftrightarrow f(x)-x=0$

on pose h(x)=f(x)-x $\Rightarrow h'(x)=f'(x)-1=\dfrac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}-1\leq 0$ car $1+x^2\geq 1$

h est continue et strictement décroissante sur IR , elle réalise donc une bijection de IR sur $h(\mathbb{R})=\left]\lim\limits_{+\infty}h,\lim\limits_{-\infty}h\right[=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$

comme $0\in h(\mathbb{R})$, alors il existe un unique réel α tel que $h(\alpha)=0$

$$h(\sqrt{3})\times h(2)<0 \quad \Rightarrow \alpha\in\left[\sqrt{3},2\right]$$

par suite α est l'unique solution de l'équation f(x)=x dans IR

5) $\begin{cases}U_0=2\\U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}$

a) (récurrence)

- $U_0=2$, $U_1=f(U_0)=1+\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ $\qquad U_0\geq U_1$ (vrai)
- supposons que : $U_n\geq U_{n+1}$ et montrons que : $U_{n+1}\geq U_{n+2}$

$U_n\geq U_{n+1}\Rightarrow f(U_n)\geq f(U_{n+1})$ car f est croissante sur IR d'où $U_{n+1}\geq U_{n+2}$

conclusion : $U_n\geq U_{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

par suite (U_n) est décroissante

b) (récurrence)

- $\sqrt{3}\leq U_0\leq 2$ (vrai)
- supposons que : $\sqrt{3}\leq U_n\leq 2$ et montrons que : $\sqrt{3}\leq U_{n+1}\leq 2$

$$\sqrt{3}\leq U_n\leq 2\Rightarrow f(\sqrt{3})\leq f(U_n)\leq f(2)\Rightarrow 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\leq U_{n+1}\leq 1+\frac{2}{\sqrt{5}}\Rightarrow \frac{2+\sqrt{3}}{2}\leq U_{n+1}\leq 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}\leq U_{n+1}\leq 2$$

conclusion : $\sqrt{3}\leq U_n\leq 2$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

c) (U_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{3}$ elle est donc convergente

- soit $l = \lim_{x\to+\infty} U_n$

$U_{n+1} = f(U_n)$, f est continue sur IR d'où $l = f(l) \Leftrightarrow l = \alpha$ d'après 4)

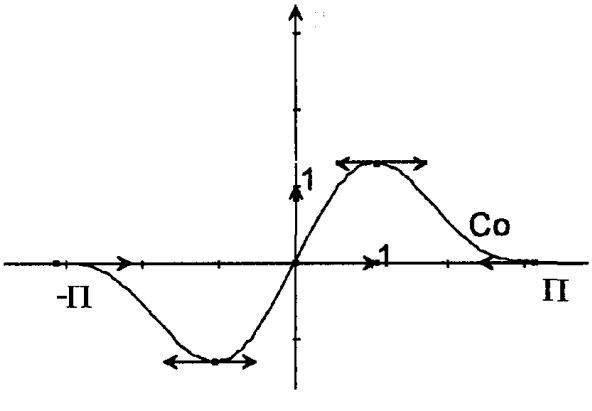
Ex23 :

$f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin(2x)$ f est dérivable sur $\mathbb{R}$

f(-x)=-f(x) : f est impaire
f(x+2π)=f(x) : 2π est une période de f $\Big\rangle$ il suffir d'étudier f sur $[0,\pi]$

$f'(x) = \cos x + \cos 2x = \cos x + 2\cos^2 x - 1 = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 2(\cos x + 1)(\cos x - \frac{1}{2})$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
f'(x)	2	+	0	-	0
f(x)	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0



$$(\zeta_f) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} t_{2k\pi\vec{i}}(\zeta_0)$$

Ex24 :

$$f(x)=\frac{cosx}{2\cos x-1}$$

$$2\cos x-1=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left\{ x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \;\; ; k\in\mathbb{Z} \;\; ou \;\; x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \;\; ; k\in\mathbb{Z} \right.$$

$$D_f=\mathbb{R}/\left\{\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right\} \; ; k\in\mathbb{Z}\right\}$$

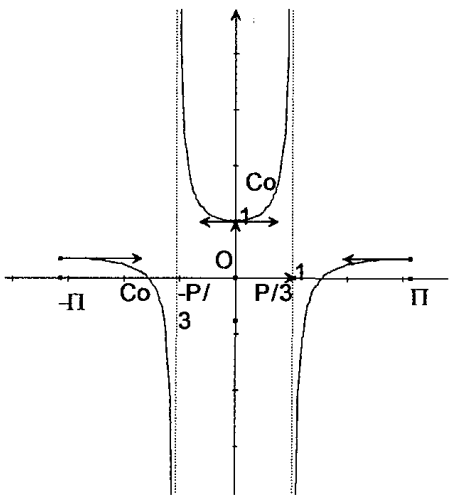
f est dérivable sur D_f $et\ f'(x)=\dfrac{-\sin x(2\cos x-1)+2\sin x\cos x}{(2\cos x-1)^2}=\dfrac{\sin x}{(2\cos x-1)^2}$

- 2π est une période de f
- f(-x)=f(x) : f est paire

$\Rightarrow D_E=[0,\pi]/\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
f'(x)	0	+	‖	+	0
f(x)	1	↗ $+\infty$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{3}$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{3})^-}\frac{\cos x}{2\cos x-1}=+\infty$$



$$(\zeta_f)=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} t_{2k\pi\vec{i}}(\zeta_0)$$

Ex25 :

$f(x)= \sin^2(x)+\cos(x)$

1) a/ $f(x+2\pi)=\sin^2(x+2\pi)+\cos(x+2\pi)= \sin^2(x)+\cos(x)=f(x)$ Donc 2π est une période de f.

b/ *pour $x\in\mathbb{R}$ on a $(-x)\in\mathbb{R}$

* $f(-x)=\sin^2(-x)+\cos(-x)=[\sin(-x)]^2+\cos(x) = \sin^2(x)+\cos(x)=f(x)$

donc f est une fonction paire⇒la droite des ordonnées est un axe de symétrie de C_f

2) a/ Domaine d'étude $D_E =[0,\pi]$

$f'(x) =2\cos(x).\sin(x)-\sin(x) \quad =2\sin(x).\left[\cos(x)-\frac{1}{2}\right]$

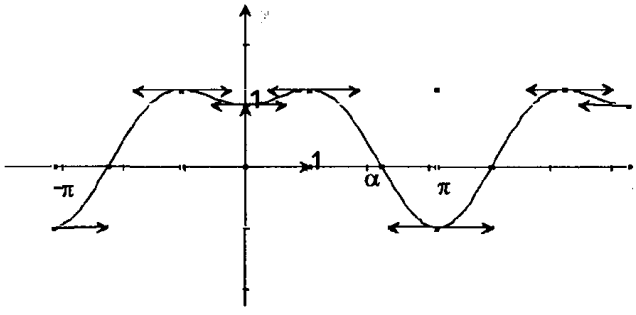
x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
f'(x)	0	+	0	-	0
f(x)	1	↗	$\frac{5}{4}$	↘	-1

b/ *f est continue et strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ donc f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ sur f($\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$)=$\left[1,\frac{5}{4}\right]$ et comme $0\notin\left[1,\frac{5}{4}\right]$ alors l'équation f(x)=0 n'a pas de solution dans $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$

* f est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ donc f réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ sur f($\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$)=$\left[-1,\frac{5}{4}\right]$ et comme $0\in\left[-1,\frac{5}{4}\right]$ alors l'équation f(x)=0 admet une seule solution αdans $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$

Conclusion : **l'équation f(x)=0 admet α comme unique solution dans $[0,\pi]$**

f(2,2).f(2,3)<0⇒2,2<α<2,3



EX 26 :

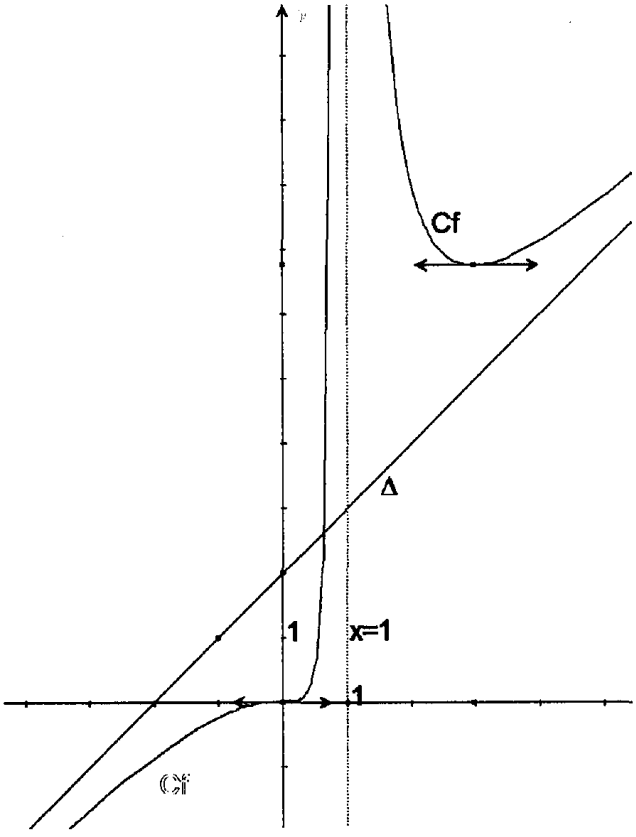
I. $f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$ D_f =IR\{1}

f est dérivable sur IR\{1} et $f'(x)=\frac{x^2.(x-3)}{(x-1)^3}$ le signe de f'(x) est celui de (x-1).(x-3)

x	-∞		0		1		3		+∞
f'(x)		+	0	+	‖	-	0	+	
f(x)	-∞	↗	+∞	↘	+∞	↘	$\frac{27}{8}$	↗	+∞

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ • $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$
- $\lim_{x\to1} f(x)=+\infty$
- $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$ • $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-x=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-x}{x^2-2x+1}=2$

Δ : y=x+2 est une asymptote à C_f au voisinage de (-∞) et au voisinage de (+∞)



II. $h(x)=\dfrac{\sin^3(x)}{(\sin(x)-1)^2}=f(\sin(x))$

1)

a/ sin(x)-1=0⇔sin(x)=1⇔ $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}$ ⇒ $D_h = IR\setminus\{\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}\}$

b/ h(x+2π)=f(sin(x+2π))=f(sin(x))=h(x) **donc 2π est une période de h.**

c/ • $x\in D_h \Rightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ ,k\in\mathbb{Z} \Rightarrow -x\neq-\dfrac{\pi}{2}-2k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \pi-x\neq\frac{\pi}{2}-2k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}\Rightarrow 2.\frac{\pi}{2}-x\in D_h$$

• h(π-x)= f(sin(π-x))=f(sin(x))=h(x)

Conclusion: Δ: **x=π/2 est un axe de symétrie pour C_h**

2) a/ h(x)= f(sin(x))

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \sin(x)=1 \\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} h(x)=+\infty$$

b/ h'(x)= cos(x).f'(sin(x))

$$\text{pour } x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\quad \left.\begin{array}{c} \cos(x)\geq 0 \\ \text{et } \sin(x)\in[-1,1[\Rightarrow f'(\sin(x))\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow h'(x)\geq 0\,;\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

$$\Rightarrow h \text{ est croissante sur } \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

c/

$$h'(x)=0 \Leftrightarrow \cos(x)=0 \quad ou \quad f'(\sin(x))=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad ou \quad \sin(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad ou \quad x=k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$S_{D_h}=\left\{\frac{-\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$$

d/ h' s'annule et ne change pas de signe

en 0 donc le point de coordonnées (0,h(0)) est un point d'inflexion pour C_h

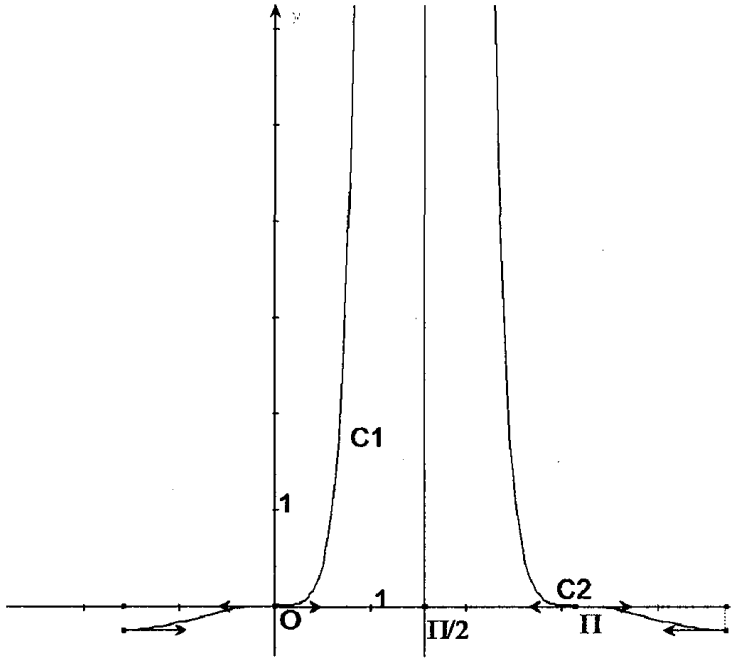
Conclusion : **l'origine du repère est un point d'inflexion pour C_h**

3) Soit C_1 la courbe de la restriction de h sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et Δ :x=π/2

$C_2 = S_\Delta(C_1)$:la courbe de la restriction de h sur $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$

$$C_h=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} t_{2k\pi\vec{i}}(C_1\cup C_2)$$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
h'(x)	0	+	0	+	
h(x)	$-\frac{1}{4}$	↗		↗	$+\infty$



EX 27 :

1) $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{x-2}$ $\quad D_f=\mathbb{R}/\{2\}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}/\{2\}$ *et* $f'(x)=\dfrac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}$

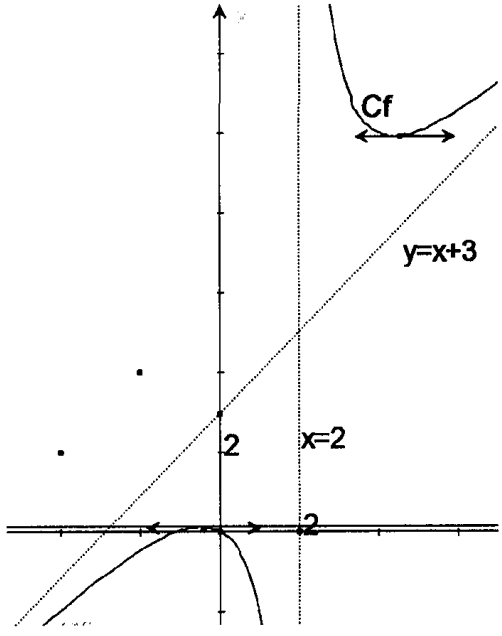
$x^2-4x-2=0$ pour $x=2-\sqrt{6}$ *ou* $x=2+\sqrt{6}$

x	$-\infty$	$2-\sqrt{6}$	2	$2+\sqrt{6}$	$+\infty$
f'(x)	+	0	- || -	0	+
f(x)	$-\infty$ ↗	f(x')	$+\infty$ || $-\infty$ ↘	f(x'')	↗ $+\infty$

* $f(x)=x+3+\dfrac{6}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(x+3)]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{x-2}=0\Rightarrow\Delta: y=x+3$ est une asymptote à (ζ_f)

f(2-$\sqrt{6}$)=5-2$\sqrt{6}$ et f(2+$\sqrt{6}$)=5+2$\sqrt{6}$



2) dans $\mathbb{R}/\{2\}$

$x^2+(1-m)x+2m=0\Leftrightarrow x^2+x=m.(x-2)\Leftrightarrow\dfrac{x(x+1)}{x-2}=m\Leftrightarrow f(x)=m$

*1er *cas* : m$\in\left]-\infty,5-2\sqrt{6}\right[\cup\left]5+2\sqrt{6},+\infty\right[$ l'équation admet deux solutions

*2eme *cas* : m=5-2$\sqrt{6}$ ou m=5+2$\sqrt{6}$ l'équation admet une unique solution

*3eme cas : m$\in\left]5-2\sqrt{6},5+2\sqrt{6}\right[$ l'équation n'a pas de solution

3) (E) $\Leftrightarrow$ f(cosx)=m $\quad \cos x \in [-1,1]$

$f([-1,1])=\left[-2;5-2\sqrt{6}\right]$

h(x)=f(cosx) est périodique de période 2π

1er cas : $m \notin \left[-2;5-2\sqrt{6}\right]$ l'équation n'a pas de solution

2eme cas : $m \in \left[-2;5-2\sqrt{6}\right]$ l'équation admet une infinité de solutions